

B.A./B.Sc. (Part II) EXAMINATION, 2016
MATHEMATICS
Paper I—(Real Analysis)

Time Allowed : Three Hours Maximum Marks : Science 75/Arts 66
 Section-A/खण्ड-अ

- (i) Define order axioms.
क्रम अभिगृहीत परिभाषित कीजिये।
- (ii) Define limit point of a set.
समुच्चय का सीमा बिन्दु परिभाषित कीजिये।
- (iii) Define convergence of Hyper-harmonic series for infinite series.
अनन्त श्रेणी, हायपर-हारमोनिक श्रेणी के अभिसरण की शर्तें लिखिये।
- (iv) Define logarithmic ratio test for infinite series.
अनन्त श्रेणियों के लिए लघुगणकीय अनुपात परीक्षण लिखिये।
- (v) Define equivalent sets.
तुल्य समुच्चय को परिभाषित कीजिये। UOKonline.com
- (vi) Define perfect set.
परिपूर्ण समुच्चय को परिभाषित कीजिये।
- (vii) Define removable discontinuity.
निराकरणीय असांतत्य को परिभाषित कीजिये।
- (viii) State Darboux theorem.
डार्वू प्रमेय का कथन लिखिये।
- (ix) Define primitive.
पुर्वग की परिभाषा लिखिये।
- (x) Define absolute and conditional convergence.
निरपेक्ष एवं सापेक्ष अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

2. If $x, y \in \mathbb{R}$, then prove that :
यदि $x, y \in \mathbb{R}$, तो सिद्ध कीजिये:
(i) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (ii) $|x-y| \geq |x|-|y|$.
3. Prove that every infinite bounded set has at least one limit point.
सिद्ध कीजिये प्रत्येक असोमित परिबद्ध समुच्चय का कम-से-कम एक सीमा बिन्दु होता है।

UNIT-II/इकाई-II

4. Test the convergence of the following series :
निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिये:

(i) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{3n-1} + \dots$

UOKonline.com

(ii) $1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \dots$

34

5. A necessary condition for the convergence of a series $\sum u_n$ is that
प्रत्येक श्रेणी के $\sum u_n$ अभिसारी होने के लिए आवश्यक शर्त है कि

$$\lim u_n = 0$$
 but conversely not necessary true. Prove it.
किन्तु इसका विलोम सदैव सत्य हो आवश्यक नहीं है। सिद्ध कीजिये।

UNIT-III/इकाई-III

6. Define countable set and prove that the closed interval $[0, 1]$ is not countable.
गणनीय समुच्चय को परिभाषित कीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि संवृत अन्तराल $[0, 1]$ गणनीय नहीं है।
7. Prove that the union of a countable family of countable sets is countable.
सिद्ध कीजिये कि गणनीय समुच्चय का गणनीय कुल का संघ भी गणनीय समुच्चय होता है।

UNIT-IV/इकाई-IV

8. Prove that if a function f is continuous on $[a, b]$, then it is bounded in that interval.
सिद्ध कीजिये कि यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत है तो वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है। UOKonline.com
9. State and prove Mostest theorem.
मोस्टेस्ट प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

UNIT-V/इकाई-V

10. Prove that every monotonic function f is R -integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन f , R -समाकलनीय होता है।

11. Test the convergence of the following integral :

निम्न समाकलनों के अभिसरण का परीक्षण कीजिये: **UOKonline.com**

(i) $\int_a^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x^2} dx, a > 0$ (ii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1} dx$.

Section-C/खण्ड-स

12. (a) Prove that the set Q of rational numbers is not a complete ordered field.

सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

(b) Show that the following function is continuous everywhere but differential coefficient does not exist at $x = 0$.

सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन सर्वत्र संतत है परन्तु $x = 0$ पर अवकलज गुणांक विद्यमान नहीं है: **UOKonline.com**

$$f(x) = \begin{cases} x \left(1 + \frac{1}{3} \sin \log x^2 \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

13. (a) If $f(x) = x, x \in [0, 1]$, then show that f is R -integrable on $[0, 1]$.
यदि $f(x) = x, x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिये कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर R -समाकलनीय है।

(b) Discuss the uniform convergence of the given series in the interval $[0, 1]$.

अन्तराल $[0, 1]$ में निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसारी होने का विवेचन कीजिये:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)$$

14. (a) If E be a bounded closed set of real number then each open cover of E has a finite subcover. Prove it.

यदि E वास्तविक संख्याओं का कोई परिवद्ध एवं संवृत समुच्चय हो तो E के प्रत्येक विवृत आवरण के लिए एक परिमित उपआवरण विद्यमान होता है। सिद्ध कीजिये।

(b) Prove that a sequence is convergent if and only if it is Cauchy's sequence. **UOKonline.com**

सिद्ध कीजिये कि एक अनुक्रम अभिसारी है यदि और केवल यदि यह कोशी अनुक्रम है।

15. (a) Test the convergence of the following integral :

निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिये:

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{x^5(1+x^2)}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

(b) (i) Apply Lagrange's mean value theorem to prove that :
लाग्रांज मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिये कि:

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \forall x > 0.$$

(ii) Find expansion of $\sin x$ with the help of Maclaurin's theorem by remainder of Lagrange.

मेक्लोरिन प्रमेय के लाग्रांज शेष पद रूप से फलन $\sin x$ का प्रसार कीजिये।